

# فیلم‌های شب شبان

- فیزیک
- زیست
- ریاضی
- شیمی



جزوات شب امتحانی



ویدئوهای شب امتحانی

ریاضی ۱





فصي ( ) مجموعه ، الكو، دنباله

(نمره) ٦

## مجموعه‌های اعداد

$\mathbb{N} \cup \{0\}$

۲:  $W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  مجموعه اعداد حسابی

۱:  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  مجموعه اعداد طبیعی

۴:  $Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$  مجموعه اعداد کویا

۳:  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  مجموعه اعداد صحیح

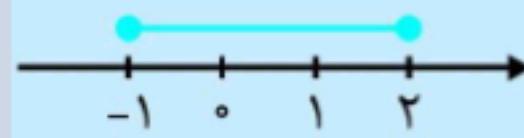
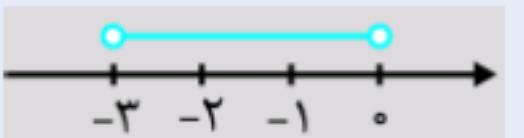
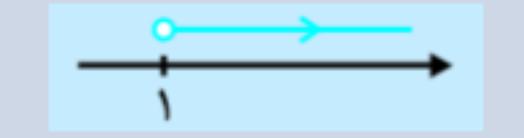
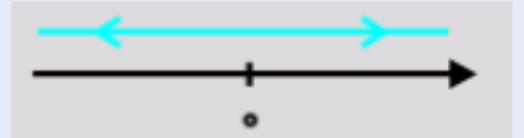
$$\begin{cases} \mathbb{R} = Q \cup Q' \\ \mathbb{N} \subseteq W \subseteq \mathbb{Z} \subseteq Q \subseteq \mathbb{R} \end{cases} \leqslant \quad 5: Q' = \mathbb{R} - Q \quad \text{مجموعه اعداد کنگ}$$

## بازه‌ها

به زیر مجموعه‌هایی از  $\mathbb{R}$  که قسمتی از مجموع اعداد حقیقی را نشان می‌دهند، بازه یا فاصله می‌گوییم. ۳ مدل بازه داریم:

- ۱ بازه بسته (شامل اعداد ابتداء و انتهای بازه می‌باشد مانند  $[1, 2]$ )
- ۲ بازه باز (شامل هیچ یک از اعداد ابتداء و انتهای بازه نیستند مانند  $(1, 2)$  ،  $(-\infty, +\infty)$  و ...)
- ۳ بازه نیم‌باز (شامل یکی از نقاط انتهایی فود می‌باشد مانند  $(1, 2]$  ،  $[1, 2)$  و ...)

## جدول زیر را به عنوان یک مثال حل شده بینید تا با انواع بازه آشنا ند) شوید!!

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه ای	نمایش هندسی
بسته	$-1, 2$	$x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 2$	
باز	$(-3, 0)$	$x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 0$	
نیم باز	$(-1, 1]$	$x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 1$	
نیم باز	$(-\infty, 2]$	$x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2$	
باز	$(1, +\infty)$	$x \in \mathbb{R} \mid x > 1$	
باز	$(-\infty, +\infty)$	$\mathbb{R}$	

### مجموعه متناهی

مجموعه هایی که تعداد اعضای آنها یک عدد حسابی است. اعضای این نوع مجموعه ها قابل شمارش است. (متناهی یعنی ته داره‌ا)

### مجموعه نامتناهی

مجموعه هایی که تعداد اعضای آنها قابل شمارش نیست. به عبارت دیگر تعداد اعضای آنها از هر عددی که در نظر بگیریم، بزرگ‌تر است.

### مجموعه مرجع

مجموعه‌ای است که همه مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه آن هستند و آن را با  $\cup$  ابتداء ازه Universal به معنی جوانی‌ا) نشان می‌هدند. اگر در سوال یا بحثی، مجموعه مرجع مشخص نباشد، ما مجموعه اعداد حقیقی (بزرگ‌ترین مجموعه‌ای که می‌شناسیش) را به عنوان مجموعه مرجع در نظر می‌گیریم.

## متّهم یک مجموعه

اگر  $U$  مجموعه مرجع باشد و  $A \subseteq U$ ، آن‌گاه مجموعه  $U - A$ ، امّتم  $A$  می‌نامیم و آن را با نماد ' $A'$  نشان می‌دهیم. در واقع  $A'$  شامل همه عضویاتی از  $U$  است که در  $A$  نیست.

این‌ها را از الان بلد باشید سر امتحان بیوو تبینید رودل بفرمایید!

$$\emptyset' = U$$

$$U' = \emptyset$$

$$(A')' = A$$

$$A \cup A' = U$$

$$A \cap A' = \emptyset$$

$$A \cup U = U$$

$$A \cap U = A$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$U \cup \emptyset = U$$

$$U \cap \emptyset = \emptyset$$

## نرخ بیکاری

برابر است با نسبت تعداد افراد بیکار در یک جامعه، به تعداد کل افراد آن جامعه. اگر مجموعه  $U$  اعضای جامعه،  $A$

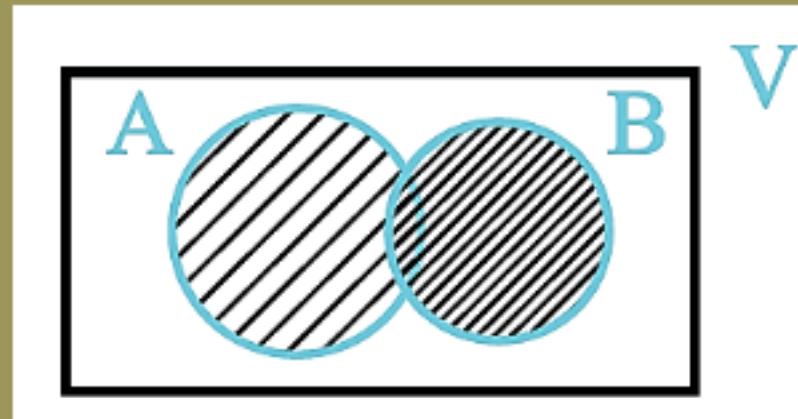
$$\frac{n(A')}{n(U)} \leq A' \text{ افراد بیکار جامعه باشند، داریم:}$$

مثال: در یک جامعه آماری، مجموعه افراد شاغل ۶۴ عضو پیشتر از مجموعه افراد بیکار دارد. اگر این جامعه به طور کلی ۹۶ عضو تشکیل شده باشد، نرخ بیکاری این جامعه چند درصد است؟

**answer**

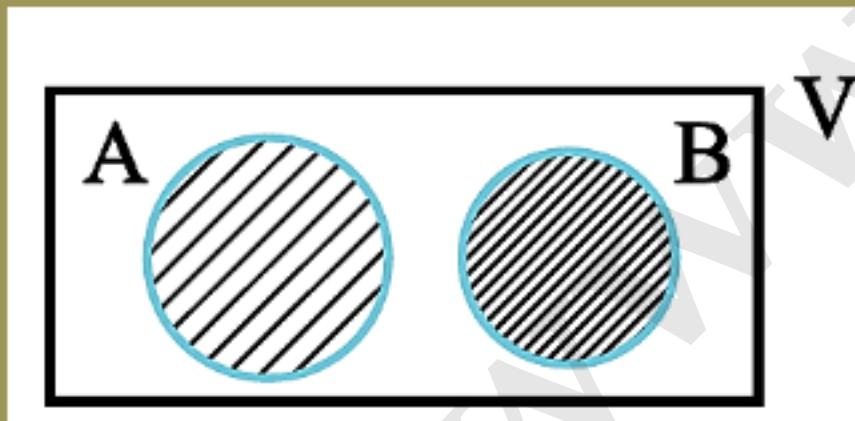
## مجموعه‌های م جدا از هم

دو مجموعه که قادر عضو مشترک باشند، ا جدا از هم یا مجزا می‌گوییم.



$$<===== n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

دقت کنید که فقط برای هالتی که  $A$  و  $B$  جدا از هم باشند (یعنی  $n(A \cap B) = 0$ ) داریم:



$$<===== \boxed{n(A \cup B) = n(A) + n(B)}$$

مثال: (کار در کلاس کتاب) در یک کلاس ۲۵ نفری، ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال، ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال می‌باشند و ۵ نفر عضو هیچ‌کدام نیستند. چند نفر از آن‌ها عضو هر دو تیم می‌باشند؟

**answer**

## الگوی مُطْبَع

الگوهایی که جمله عمومی آن‌ها به فرم  $t_n = an + b$  است که  $n$  شماره جمله و  $a$  و  $b$  اعدادی حقیقی می‌باشند.  
مثال: در یک الگوی مُطْبَع، جملات چهارم و دهم به ترتیب ۱۷ و ۳۱ می‌باشند. جمله عمومی الگو را بایابید و به کمک آن جمله ۳۱۹ را بدست آورید.

**answer**

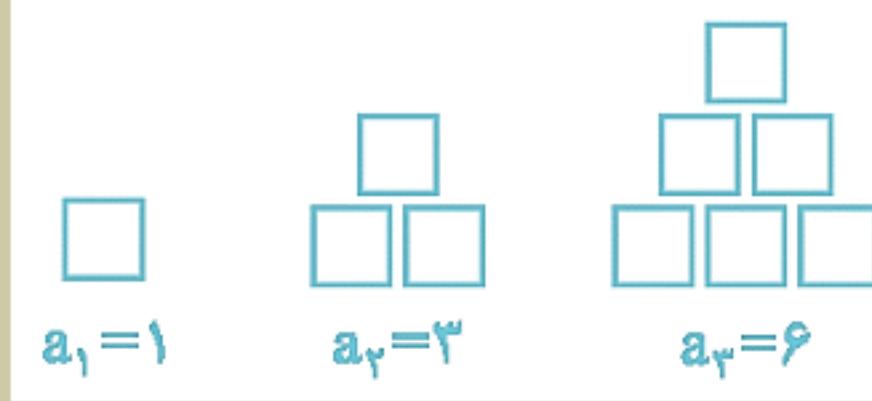
## الگوی غیرمخطی

الگویی است که درجه جمله عمومی آن نسبت به  $n$ ، یک نیست. ماتندر  $a_n = an^r - 1$  که جمله عمومی، مربوط به یک دنباله درجه ۲ است.

دنباله

زنجیره‌ای از اعداد، پشت سر هم را یک دنباله می‌گوییم. این اعداد، جملات دنباله تامیده می‌شوند

مثال: (کار در کلاس) الگوی مقابل را در نظر بگیرید. جمله ششم آن را بدست یافته باشید. سپس جمله عمومی (نیاله مربوط به این الگو را بیابید. آیا نیاله حاصل فقط است؟



answer

## دنباله حسابی

دنباله‌ای که هر جمله از آن (به بجز جمله اول) با اضافه کردن عددی ثابت به جمله قبلی بدست می‌آید. به این عدد ثابت قدر نسبت می‌گوییم و با  $d$  نشانش می‌دهیم.

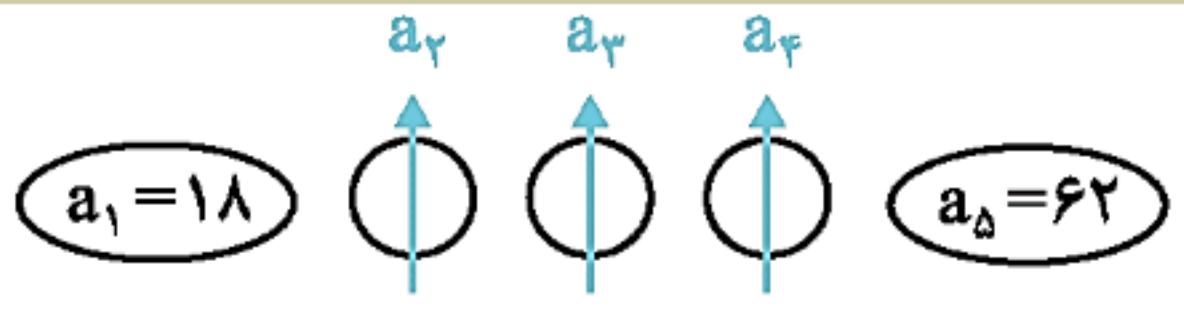
توجه: جمله عمومی دنباله حسابی با جمله اول  $a_1$  و قدر نسبت  $d$  می‌شود.

نکته: هواست باشه اون عددی که به عنوان ضریب میاد پشت  $d$ . مقدارش یدونه از اندیس کمترها

## واسطه یا میانگین حسابی

اگر  $x$  و  $y$  و  $z$  ۳ جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند، داریم  $y = \frac{x+z}{2}$  و به لا می‌گوییم واسطه حسابی  $x$  و  $z$ .

مثال: (کار در کلاس) بین اعداد ۱۸ و ۶۲ سه عدد هاصل تشکیل یک دنباله حسابی بدهند.



answer

## دنباله هندسی

دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به بجز جمله اول) از ضرب جمله قبلی اش در عددی ثابت و غیر صفر بقسمت می‌آید. این عدد را قدر نسبت می‌گوییم و آن را با  $q$  نشان می‌دهیم.

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

توجه: جمله عمومی یک دنباله هندسی با جمله اول  $a_1$  و قدر نسبت  $q$  می‌شود:

نکته: هواست باشه توان بالای سر  $q$  یدونه کمتر از اندریسه!

## واسطه یا میانگین هندسی

اگر  $X$ ,  $y$  و  $Z$ , ۳ جمله متواالی از یک دنباله هندسی باشند، آنگاه رابطه  $y^2 = XZ$  بین آن‌ها برقرار است و  $y$  واسطه هندسی  $X$  و  $Z$  است.

نکته: فور لاوسطه هندسی است، نه  $y^2 = XZ$

مثال: اگر  $2x^2 + 1$  و  $2x - 1$  به ترتیب ۳ جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند، قدر نسبت آن کدام است؟

**answer**

الف) مجموعه اعداد طبیعی

پ) بازه  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

ث) مجموعه مقربهای طبیعی عدد ۱۰۰

ت)  $A = \{x \in \mathbb{N}, 1 < x < 2\}$

ب) مجموعه شمارندهای طبیعی عدد ۳۶

ا- (تمرین کتاب) متنهای یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

۲- (تمرین کتاب) اگر  $A \subseteq B$  مجموعه‌ای متاهمی باشد، آنگاه  $A$  متاهمی فواهد بود یا ناممتاهمی؟

۳- (تمرین کتاب) در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای، مشخص شد که ۷۰ نفر از آن‌ها در ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. همچنین ۳۲ نفر از آنها نیز اعلام کرده‌اند که در این مدت از هر دو شرکت خرید کرده‌اند. په تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته:

الف) دست‌کم از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند؟

ب) فقط از شرکت A خرید کرده‌اند؟

پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند؟

ت) از هیچ یک از این دو شرکت خرید نکرده‌اند؟

**answer**

۴- (تمرین کتاب) الگوی زیر را در نظر بگیرید.

الف) شکل بعدی را رسم کنید.

ب) جمله عمومی الگو را بیابید.

پ) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟

شکل ۱



شکل ۲



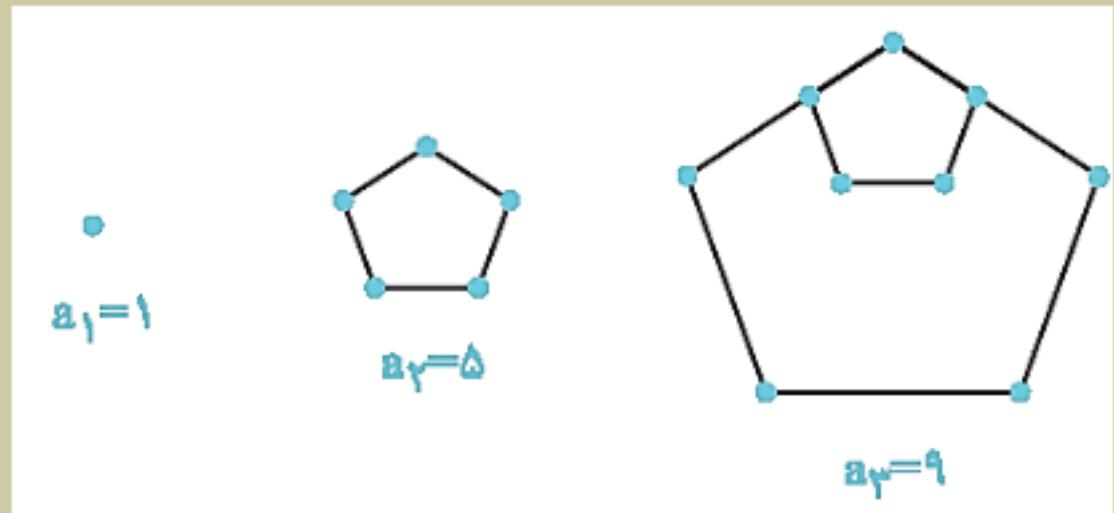
شکل ۳



۵- (تمرین کتاب) در یک جمله دنباله حسابی مجموع ۳ جمله اول ۳۹ و مجموع ۳ جمله بعدی آن ۱۳۹ است. دنباله را مشخص کنید.

answer

۶- (تمرین کتاب) الف) جمله بعدی الگوی مقابل را با رسم شکل بایابید و نوع دنباله را مشخص کنید.



answer

ب) جمله عمومی آن را مشخص کنید.

پ) جمله پنجم آن (دنباله ۳۹۷) است؟

۷- (تمرین کتاب) علی دوچرخه‌ای را به قیمت ۵۰۰ هزار تومان فرید. فرض کنید قیمت آن هر سال، ۲۰ درصد نسبت به سال قبل افت می‌کند.

- الف) اگر پس از ۳ سال قصد خرید دوچرخه‌اش را داشته باشد، به چه قیمتی می‌تواند آن را بفروشد؟
- ب) قیمت دوچرخه پس از گذشت ۱۰ سال از چه رابطه‌ای برسست می‌آید؟

answer

۱- (تمرین کتاب) جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ می باشند. دنباله را مشخص کنید.

**answer**

۹- (امتحانات سال گذشته) فرض کنید  $A$  و  $B$  زیرمجموعه هایی از مجموعه مرجع  $U$  باشند که

$$n(A \cap B) = 25, \quad n(B) = 50, \quad n(A) = 70, \quad n(U) = 120$$

ج)  $n(A \cap B')$

ب)  $n(A' \cap B')$

مطلوب است: الف)  $n(A \cup B)$

answer

**answer**

۱۰- (امتحانات سال گذشته) بین دو عدد ۳ و ۱۶۳ چهار عدد طوری قرار دهید که در باله حسابی تشکیل شود.

۱۱- (امتحانات سال گذشته)  $a_n$  و  $b_n$  دنباله‌های مقابل هستند. بیست و هفتمین جمله دنباله  $b_n$  برابر  $k$  است.  $k$  را بدست آورید.

$$\begin{cases} a_n = -5, -1, 3, \dots \\ b_n = 2\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \dots \end{cases}$$

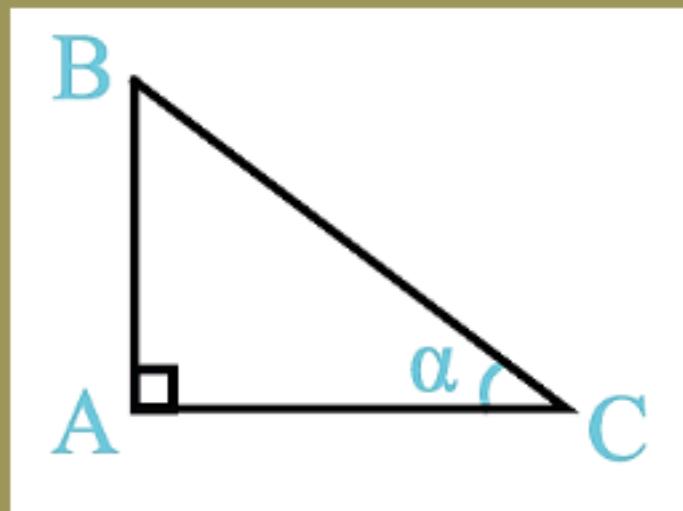
answer



فِصَادْ : مُشَتَّتْ (نَمَدْ دَ)

## نسبت‌های مثلثاتی

در مثلث هر قائم‌الزاویه داریم:



$$\cos \alpha = \frac{AC}{BC}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{AC}{AB}$$

$$\sin \alpha = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{AB}{AC}$$

مثال: (کتاب درسی) نسبت های مثلثاتی زاویه  $45^\circ$  را حساب کنید.

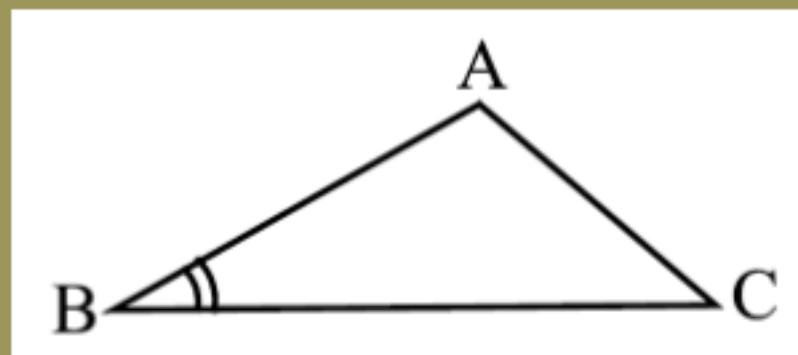
answer

# مقادیر مثلثاتی زوایایی معمولی

جدول زیر را باید حفظ کنید ا همین قدر، فشک و گوشت تلغیخ

مقدار	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
Sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$
cot	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

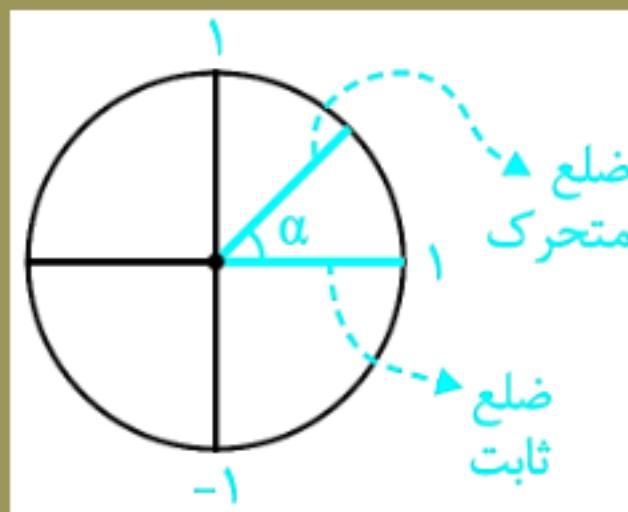
## مساحت مثلث



در هر مثلث با معلوم بودن دو ضلع و زاویه بین، مساحت قابل محاسبه است:

$$S = \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin B$$

## دایره مثلثاتی



دایره‌ای است به شعاع واحد، کار آن تولید زاویه است. یک ضلع ثابت دارد، یک ضلع متحرک. ضلع متحرک با حرکت فود و انحرافی که ایجاد می‌کند، زاویه تولید می‌کند.

توجه: حرکت ضلع متحرک در فلاف بجهت عقربه‌های ساعت، هرکتی مثبت است و زوایایی مثبت تولید می‌کند، اما حرکت آن در بجهت عقربه‌های ساعت، هرکتی منفی است و زوایایی منفی تولید می‌کند.

**answer**

مثال: (فعالیت کتاب) هر یک از زوایای  $135^\circ$ ،  $130^\circ$  و  $270^\circ$ - را روی یک دایره نشان دهید.

### نتیجه ۱

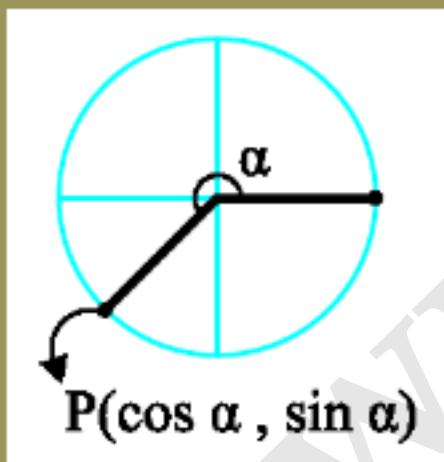
مفور،  $\Delta$ ها، مفور  $\Delta$ ها و مفور لاهما، مفور  $\sin$  هاست. از آنچهایی که این مفورها در دایره بین ۱ و -۱ بلوکه شده‌اند، پس برای هر زاویه  $\Delta$  لفواه  $\Delta$  داریم:

$$-1 \leq \sin \Delta \leq 1$$

$$-1 \leq \cos \Delta \leq 1$$

### نتیجه ۲

نقطه انتهايی فضای متحرک (يعني  $P$  دارای يك مولفه طولي (كه هي شود  $\cos$  زاويه مرکزی) و يك مولفه عرضي (كه هي شود  $\sin$  زاويه مرکزی) است، يبينيد:

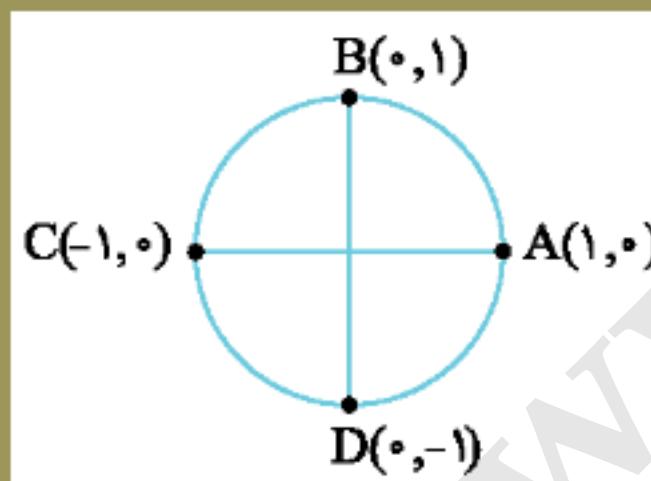


### نتیجه ۳

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

### نسبت‌های مثلثاتی زوایایی ابتدای ربع‌ها

زوایایی ابتدای ربع‌ها مثلا  $0^\circ$  و  $90^\circ$  و  $180^\circ$  و  $270^\circ$  و  $360^\circ$  و ... که در دایره مقابل روی نقاط A و B و C و D قرار می‌گیریم. می‌دانیم طول این نقاط، برابر  $\sin$  و عرض این نقاط برابر  $\cos$  این زوایا است.



# علامت نسبت‌ها در ربع‌های دایره

$$\sin x > 0$$

$$\tan x < 0$$

$$\cos x < 0$$

$$\cot x < 0$$

$$\sin x > 0$$

$$\tan x > 0$$

$$\cos x > 0$$

$$\cot x > 0$$

$$\sin x < 0$$

$$\tan x > 0$$

$$\cos x < 0$$

$$\cot x > 0$$

$$\sin x < 0$$

$$\tan x < 0$$

$$\cos x > 0$$

$$\cot x < 0$$



ریاضیات  
کوسینوس تانگانت سینوس

رمز: بارهسته اتم مشتبه!

مثال: اگر  $\alpha$  انتوای ربع دایره مثلثاتی می باشد،  $\tan^2 \alpha \times \sin \alpha > 0$  و  $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$

answer

# فرمولای مقدماتی مثلثات

۱

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

۲

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$



۴

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

در نوامی ۱ و ۴  $\alpha$ در نوامی ۲ و ۳  $\alpha$ 

۳

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$



۵

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

در نوامی ۱ و ۲  $\alpha$ در نوامی ۳ و ۴  $\alpha$ 

۶

$$\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$$

۷

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

فرمولای

نقره‌ای

$$1 \div \sin^2 \alpha$$

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

۸

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$1 \div \cos^2 \alpha$$

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

۹

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

مثال: (مثال کتاب درسی) درستی اثبات مثبتاتی را بررسی کنید.

$$\left( \frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta \right) (1 - \sin \theta) = \cos \theta$$

answer

مثال: (ک) در کلاس) درستی هر یک از تساوی های زیر را مشخص کنید.

$$\frac{1}{\cos \alpha} + \cot \alpha = \frac{\tan \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\text{ب})$$

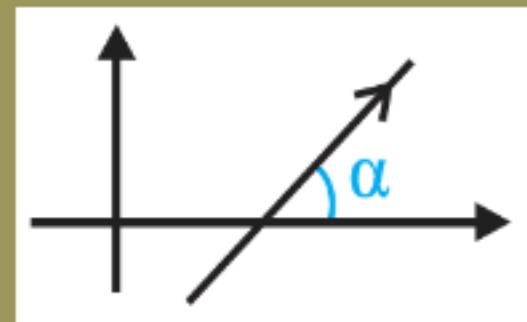
answer

$$\sin^4 \theta - \cos^4 \theta = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \quad (\text{الف})$$

answer

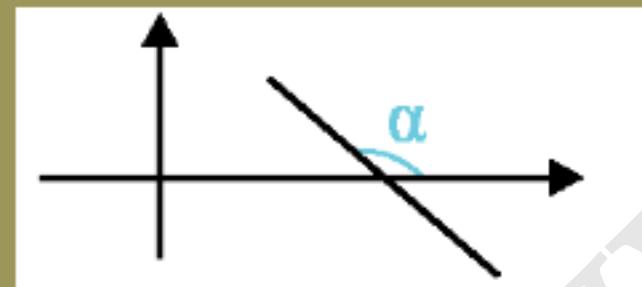
## رابطه شیب خط با تانژانت زاویه

شیب هر خط که مسحور افقی را قطع می‌کند، برابر است با تانژانت زاویه بین آن خط و جهت مثبت مسحور Xها.



$$\Rightarrow \text{شیب خط} = \tan \alpha$$

نکته: گوش و پشمتو تیز کن! گفتم زاویه بین خط و جهت مثبت مسحور Xها! مثلا برای این خط که نزولیه، رو



مشخص می‌کنم، بین



## پادآوری ۱

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

معادله خطی با شیب  $m$  که از نقطه  $A \left|_{y_0}^{x_0}$  میگذرد

## پادآوری ۲

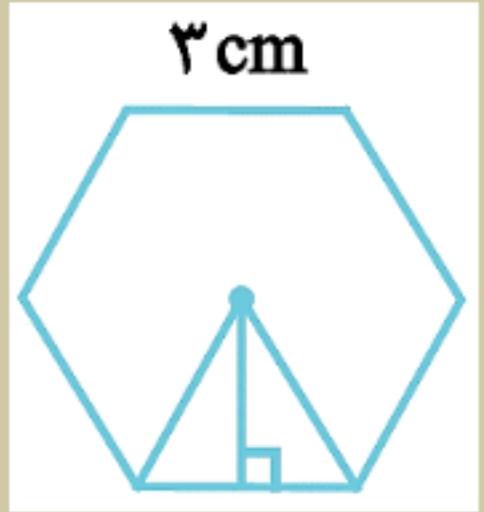
$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$$

معادله خطی که از ۲ نقطه  $B \left|_{y_1}^{x_1}$  و  $A \left|_{y_0}^{x_0}$  میگذرد

مثال: (کار در کلاس کتاب با تغییر) معادله خطی را بنویسید که زاویه آن با جهت منفی محو،  $X$ ها  $150^\circ$  است و از نقطه  $(1, 0)$  میگذرد.

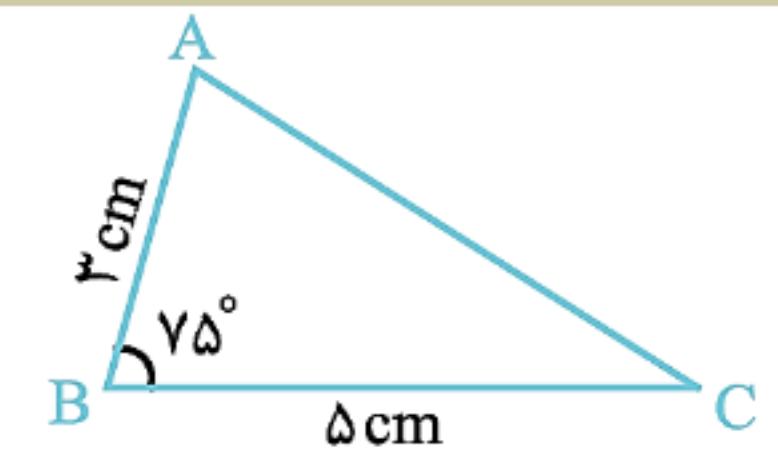
**answer**

۱- (تمرین کتاب) مساحت شش ضلعی منتظم زیر را به درست آورید.



answer

۲- (تمرین کتاب) فرض کنید  $\sin 75^\circ \approx 0.96$ . مساحت مثلث  $ABC$ ، شکل زیر را به دست آورید.



answer

۳- (تمرین کتاب) سایر نسبت های مثلثاتی را به دست آورید اگر  $\cos \alpha = \frac{3}{7}$  (ریاضی پنجم)

answer

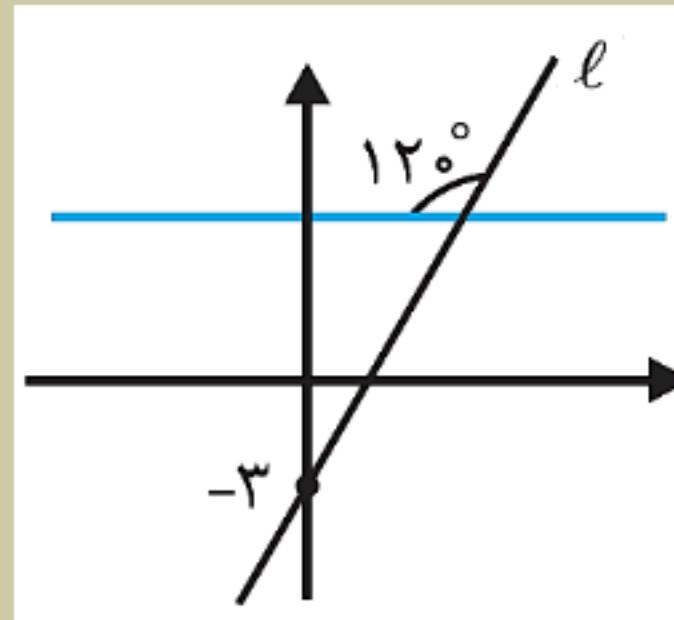
۱۴- (تمرین کتاب) اگر  $\sin \alpha \times \cos \alpha < 0$  آنگاه  $\alpha$  در کدام یک از نواحی چهارگانه می‌تواند قرار بگیرد؟

answer

۵- (تمرین کتاب) معادله خطی را بنویسید که زاویه آن با جهت مثبت محور  $X$   $45^\circ$  است و نقطه  $(0, 2)$  روی آن قرار دارد.

**answer**

۶- (تمرین کتاب) با توجه به شکل زیر، معادله خط را به دست آورید.



**answer**

۷- (تمرین کتاب) اگر  $\tan 240^\circ = \sqrt{3}$  باشد آنگاه سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $240^\circ$  را به دست آورید.

answer

۱- (امتحانات سال گذشته) درستی رابطه زیر را بررسی کنید.

$$\sin 6^\circ \cos 3^\circ - \cos 6^\circ \sin 3^\circ = \sin 3^\circ$$

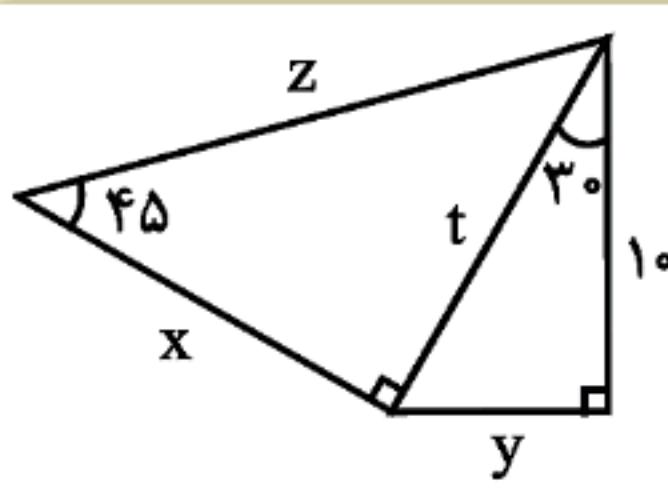
answer

$$\frac{\cot 60^\circ - \tan 30^\circ + 5 \cot 45^\circ}{\sqrt{3} \cot 45^\circ - \sin 90^\circ + 5 \tan 45^\circ}$$

۹- (امتحانات سال گذشته) حاصل عبارت زیر را به درست آورید.

**answer**

۱- (امتحانات سال گذشته) با توجه به شکل، اندازه اضلاع  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$ , را به دست آورید.



answer

۱۱- (امتحانات سال گذشته) با خرضن با معنی بودن هر کسر، درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

$$\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x} \quad (\text{الف})$$

answer

$$\therefore \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

answer

فصل م:

توانهای گویا و  
عبارت‌های مخبری

(۶ نمره)



## محاسبه مقدار تقریبی ریشه‌ها

بعضی از ریشه‌ها مقدارشان دقیق است، مانند  $\sqrt[3]{27}$  اما گاهی از ها می‌فواهند مقدار تقریبی حساب کنیم مانند  $\sqrt[3]{20}$ .

در این حالت  $\sqrt[3]{20}$  را بین دو ریشه سوم دقیق قرار می‌دهیم؛  $\sqrt[3]{27} < \sqrt[3]{20} < \sqrt[3]{27}$

از آنجایی که  $20$  به  $27$  نزدیک‌تر است، پس  $\sqrt[3]{20}$  از  $2/5$  بیشتر است. مثلاً عدد  $2/7$  را درس زده و به عنوان جواب ارائه می‌دهیم.

مثال: (کار در کلاس) مقدار تقریبی ریشه‌ها را برای هر قسمت محاسبه کنید.

ب)  $\sqrt{89}$

**answer**

الف)  $\sqrt[3]{-16}$

**answer**

هر عدد مثبت دارای ۲ ریشه زوج است که مقادیر آن‌ها قرینه یکدیگرند. اعداد منفی ریشه زوج ندارند. (مثلاً،

$$\text{نتیجه می‌شود } \quad \text{اعداد } 2 \text{ و } -2 \text{ ، ریشه‌های چهارم } 16 \text{ می‌باشند! عدد } -16 -$$

ریشه چهارم ندارد.)

هر عدد مثبت یا منفی دارای ۱ ریشه فرد است. اگر مثبت باشد، ریشه فرد آن نیز مثبت و اگر منفی باشد، ریشه فرد آن نیز منفی فواهد بود.

**answer**

مثال: یشه پنجم اعداد  $\frac{1}{10000}$  را حساب کنید.

اعداد بین صفر و یک هر چه توانشان بیشتر باشد، مقدارشان کمتر و اعداد بزرگ تر از یک هر چه توانشان بیشتر باشد، مقدارشان بیشتر می‌شود. (مثلًا  $1^5 > 1^3 > 1^1 > 1^0$ ) . برای مقایسه دو عدد منفی، اول بدون منفی آن‌ها را حساب کن، مثلًا بین  $-2^5$  و  $-2^7$  می‌دانیم  $-2^5 < -2^7$  . اما

ریشه متمم: اگر  $n \geq 2$  و یک عدد طبیعی باشد،  $b^n = a$  ریشه متمم  $a$  می‌نماییم هرگاه :

## نکاتی باحال از بعثت فوق

①  $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{ab} & n=2k \quad a,b>0 \\ \sqrt[n]{ab} & n=2k+1 \end{cases}$

②  $\begin{cases} \rightarrow \sqrt[n]{a^n} = |a| \longrightarrow \sqrt[4]{2^4} = |2| = 2 \\ \rightarrow (\sqrt[n]{a})^n \begin{cases} a < 0 \Rightarrow \\ a \geq 0 \Rightarrow \end{cases} \end{cases}$

③  $n = 2k - 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a \longrightarrow \sqrt[3]{(-2)^3} = (\sqrt[3]{-2})^3 = -2$

# نکاتی از توانهای گویا

۱

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \rightarrow (-2)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(-2)^2} = \sqrt[3]{4}$$

۲

$$a^{-\Delta} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\Delta} \rightarrow 2^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

۳

$$a^r \times a^s = a^{(r+s)}$$

۴

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{(r-s)}$$

۵

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

۶

$$(ab)^r = a^r \times b^r$$

۷

$$a^{b^c} = (a)^{(b^c)} \neq (a^b)^c \rightarrow 2^{2^2} = 2^{(2^2)} = 2^4 \neq (2^2)^2$$

۸

$$(a^b)^c = a^{(b \times c)} \rightarrow (2^2)^2 = 2^6 = 64$$

۹

$$a > 0 \Rightarrow \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \times n]{a} \rightarrow \sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$$

## اتعادهای جبری

$$1) (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$2) a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \longrightarrow a^{2\Delta} - b^{2\circ} = (a^{\Delta} - b^{\circ})(a^{\Delta} + b^{\circ})$$

$$3) x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

نکته: توجه کنید که فضای جمله توان ۲ (یعنی)، یک است. اگر فضای داشت، عبارت را با روش A می‌توانیم تجزیه کنیم. مثلاً فرض کنید می‌فواهیم را تجزیه کنیم:

$$A = 2x^2 + 3x + 1 \longrightarrow 2A = (2x)^2 + 3(2x) + 2 = (2x + 1)(2x + 2) \xrightarrow{\div 2} A = (2x + 1)(x + 1)$$

$$4) \text{ اتماد مکعب مجموع دو جمله } \Rightarrow (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$5) \text{ اتماد پاچ و لاغر } \Rightarrow a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

**answer**

مثال: (کلر، کلاس) عبارت  $-x^6$  را تا جایی که ممکن است تجزیه کنید.

## عبارت گویا

به عبارت‌های کسری‌ای می‌گویند که صورت و مخرج آن یک چند جمله‌ای است. مثلاً  $\frac{x^2 - 1}{x}$  و  $2x$  و  $\frac{\sqrt{x} - 1}{2x}$  فیرا چون صورتش چند جمله‌ای نیست.

توجه: یک عبارت گویا به ازای مقادیری از متغیر که مخرج را حذف می‌کنند (ریشه‌های مخرج) تعریف نمی‌شود.

مثال: (فعالیت کتاب) عبارت گویایی زیر به ازای چه مقادیری از  $x$  تعریف نمی‌شود؟

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2+4}$$

مثال: (فعالیت کتاب) حاصل کسرهای زیر را بدست آورید و ساده کنید.

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2-1}$$

answer

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} + \frac{3}{x-1}$$

answer

$$\frac{x^r - 1}{(x - 1)^r}$$

answer

$$\frac{x^s + 1}{x^r + rx^r + 1}$$

answer

## گویا کردن مخرج کسرها

از سال گذشته به یاد دارید که برای گویا کردن مخرج کسرهایی که شامل یک رادیکال است، صورت و مخرج را در عبارت رادیکالی مناسب ضرب می‌کردیم تا مخرج گویا شود. بینید:

$$\frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$$

$$\frac{2}{\sqrt[3]{4}} = \frac{2}{\sqrt[3]{4}} \times \frac{\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^2}} = \frac{2\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{4^3}} = \frac{2\sqrt[3]{2^4}}{4} = \frac{2 \times 2\sqrt[3]{2}}{4} = \sqrt[3]{2}$$

۲ عبارت  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$  و  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  مزدوج یکدیگرند. اگر مفرجی فقط یکی از آنها را داشت، برای گویا کردن مخرج، صورت و مخرج را در مزدوج ضرب کرده و اتحاد مزدوج می‌سازیم و کامروا می‌شویم!

مثال: (فعالیت کتاب) مدرج کسرهای زیر را گویا کنید.

$$\frac{h}{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}$$

answer

$$\frac{h}{\sqrt{2} + 4}$$

answer

$$\frac{1}{(\sqrt[3]{x^2} + 1)}$$

answer

$$\frac{x + \lambda}{\sqrt[3]{x} + 2}$$

answer

۱- (تمرین کتاب) مقدار تقریبی هر کدام از اعداد، رادیکالی زیر را با یک رقم اعشار مشخص کنید.

(الف)  $\sqrt{10}$

(ب)  $\sqrt[3]{7125}$

**answer**

(پ)  $\sqrt[5]{16}$

(ت)  $\sqrt[5]{64}$

**answer**

۲- (تمرین کتاب) جاهای خالی را پر کنید.

الف) اعداد ۳ و ..... ریشهای چهارم عدد ..... می باشند.

ب) اگر  $a = \sqrt[4]{16}$  باشد، در این صورت حاصل عبارت  $a^3 + 5$  برابر است با .....

**answer**

۳- (تمرین کتاب) در جاهای فالی یکی از علامت‌های «<»، «>» یا «=» را قرار دهید.

$$\sqrt[5]{0.100001} \text{○} 0.1$$

$$(-2)^5 \text{○} (-2)^4$$

$$(-0.1)^5 \text{○} (-0.1)^3$$

$$(0.15)^2 \boxed{\phantom{0}} (0.15)^3$$

$$\sqrt{0.15} \boxed{\phantom{0}} \sqrt[3]{0.15}$$

$$\sqrt{4} \boxed{\phantom{0}} \sqrt[3]{4}$$

$$0 < a < 1 \\ \Rightarrow \Rightarrow$$

$$\sqrt{a} \boxed{\phantom{0}} \sqrt[3]{a}$$

$$a^2 \boxed{\phantom{0}} a^3$$

$$a > 1 \\ \Rightarrow \Rightarrow$$

$$\sqrt{a} \boxed{\phantom{0}} \sqrt[3]{a}$$

$$a^2 \boxed{\phantom{0}} a^3$$

۱- (تمرین کتاب) حساب کنید.

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{64}}$$

$$\sqrt{\sqrt{11}}$$

۹- (تمرین کتاب) هر یک از عبارت‌های زیر را تا حد ممکن تجزیه کنید.

$$x^4 - y^4$$

$$x^6 - y^6$$

$$\lambda a^3 + 27$$

$$a^3 b^6 - \lambda$$

۱۰- (تمرین کتاب) مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

$$\frac{3}{3 + \sqrt{7}}$$

$$\frac{8}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x} - 2}$$

$$\frac{6}{2\sqrt[3]{2} - 1}$$

۱۱- (تمرین کتاب) حاصل عبارت‌های زیر را به درست آورید.

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} - \frac{5x}{x-1}$$

answer

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1} - \frac{1}{x-1}$$

answer

۱۲- (تمرین کتاب) اگر  $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-4}$  را به صست آورید.

**answer**

۱۳- (امتحانات سال گذشته) حاصل عبارات زیر را به صورت توان گویا بنویسید.

$$\sqrt[5]{\sqrt[2]{\sqrt[3]{\sqrt{3}}}}$$

answer

$$(\sqrt[4]{\sqrt[2]{\sqrt[3]{3}}})^{48}$$

answer

۱۴- (امتحانات سال گذشته) اگر  $2^{x+y} = \frac{1}{32}$  باشد، حاصل  $x+y$  را به درست آورید.

answer

۱۵

۱۰- (امتحانات سال گذشته) اگر  $a + b = 1$  باشد،  $a^3 + b^3$  و  $a^2 + b^2 = 5$  باشد، آنگاه  $a^3 + b^3$  را محاسبه کنید.

**answer**

فهد : معادله و نمعادله (نمره ٦)



## معادله درجه ۲

هر معادله به فرم  $ax^2 + bx + c = 0$  که  $a \neq 0$  است. باید روش‌های حل آن را سریع مرور کنیم.

### - حل درجه ۲ به کمک تجزیه

با کمک اتحادها یا فاکتورگیری...

$$x^2 - 3x = 10$$

$$2t^2 = t$$

## ۲- حل معادله درجه ۲ په کمک ریشه‌گیری

می‌دانیم اگر  $a > 0$  و  $x^2 = a$  باشد آنگاه  $x = \sqrt{a}$  یا  $x = -\sqrt{a}$  از این خاصیت برای حل این معادلات بهره می‌بریم. بیینید:

$$(r - 2)^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} r - 2 = 4 \Rightarrow r = 6 \\ r - 2 = -4 \Rightarrow r = -2 \end{cases}$$

### ۳- حل معادله درجه ۲ به کمک مربع کامل کردن

برای مربع کامل کردن معادله درجه دو  $ax^2 + bx + c = 0$  ابتدا طرفین را برابر تقسیم کن. بعد ضربیب  $x$  را نصف کنید، به توان ۲ برسانید، یکبار جمع و یکبار کم کنید تا اتهاد اول ساخته شود. مثال زیر را بینید.

(کار در کلاس) (مثال)

$$2x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x^2 + \frac{x}{2} - 1 = 0 \rightarrow$$

$$\underbrace{x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{16}}_{\text{کم کنید}} - \frac{1}{16} - 1 = 0 \Rightarrow (x + \frac{1}{4})^2 - \frac{17}{16} = 0 \Rightarrow (x + \frac{1}{4})^2 = \frac{17}{16} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x + \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{17}}{4} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{17} - 1}{4} \\ x + \frac{1}{4} = -\frac{\sqrt{17}}{4} \Rightarrow x = \frac{-\sqrt{17} - 1}{4} \end{cases}$$

## ۳- حل معادله درجه دوم با روش فرمول کلی

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \Delta = b^2 - 4ac \quad \text{داریم: } ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{معادله}$$

برست می‌آیند.

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{معادله دارای دو ریشه} \iff \Delta > 0 \quad \text{اگر}$$

اگر  $\Delta = 0$  معادله دارای یک ریشه مکرر مرتبه دو هم می‌گویند.

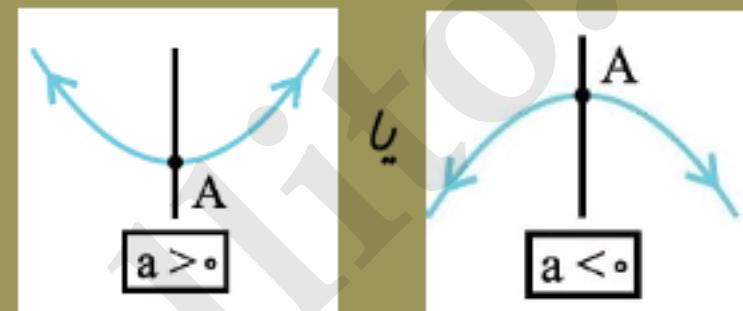
اگر  $\Delta < 0$  معادله خالق ریشه است.

مثال: (مثال کتاب) از یک رشته سیم به طول ۵۰ متر، می‌خواهیم یک مستطیل به مساحت ۱۴۴ متر مربع بسازیم.  
طول و عرض این مستطیل را مشخص کنید.

answer

نمودار هر معادله به صورت  $y = ax^2 + bx + c$  هستند، ایک سهمی

است.



می‌گوییم که به یکی از ۲ صورت

راس سهمی

نقطه A در شکل بالا (در قله و قعر نمودار)، راس سهمی می‌گوییم. طول این نقطه این طول را آگر در معادله سهمی قرار دهید، عرض راس را می‌گیرید.

$$x_A = -\frac{b}{2a}$$

## خط تقارن سهی

خط پین قائم در دو شکل بالا را خط تقارن سهی می‌گوییم. این خط، خط قائمی است که از راس سهی

می‌باشد.

$$x = -\frac{b}{2a}$$

می‌گذرد و معادله آن

مثال: (کل، کلاس) در هر یک از سهمی‌های زیر، راس، امشخص و سپس آن را، سع کنید.

(الف)  $y = (x + 1)^2 - 2$

**answer**

(ب)  $y = -2x^2 + 1$

**answer**

## تعیین علامت

PART 1: تعیین علامت عبارات فطی به فرم  $y = ax + b$

ابتدا ریشه آنها را بحسب  $ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$  بیاوریم.

تعیین علامت کنید.

x	حدود	$-\frac{b}{a}$
y	علامت a	علامت a
	مخالف	موافق

نکته: هواست باشد، تعیین علامت  $(ax + b)^{2n+1}$  (ax + b) دلیقاً شبیه  $(ax + b)^{2n}$  همواره

بزرگ‌تر یا مساوی صفر است.

مثال: (کار، کلاس) هر یک از عبارات زیر را تعیین علامت کنید.

$$\mathbf{A} = (2\mathbf{x} - 3)^2 \times (\mathbf{x}^3)$$

$$\mathbf{B} = \frac{(\mathbf{x} - 1)}{(5 - 2\mathbf{x})}$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

## PART 2: تعیین علامت عبارات درجه دو به فرم

ابتدا ریشه(های) آن را بدست می‌آوریم. بسته به تعداد ریشه‌ها (علامت  $\Delta$ ) ۳ حالت برای تعیین علامت

آن ایجاد می‌شود:

حدود $x$	$x_1$	$x_2$	
$y$	موافق علامت $a$	مخالف علامت $a$	موافق علامت $a$

(الف)  $\Delta > 0$  ریشه دارد و به صورت زیر تعیین علامت می‌شود:

حدود $x$	$x_1 = x_2$
$y$	موافق علامت $a$

(ب)  $\Delta = 0$  یک ریشه مضاعف دارد و به صورت زیر تعیین علامت می‌شود:

حدود $x$	
$y$	همواره موافق علامت $a$

(ج)  $\Delta < 0$  معادله فاقد ریشه است و به صورت زیر تعیین علامت می‌شود:

مثال: (مثال کتاب با تغییر) عبارت زیر را تعیین علامت کنید.

$$p(x) = \frac{(-2x+1)(\overbrace{-x^2+x-2}^{\text{که ممکن است}})}{(x^2+x-2)}$$

answer

اگر  $A$  و  $B$  دو عبارت بیانی باشند، خرم‌های  $A < B$  ،  $A \leq B$  ،  $A \geq B$  ،  $A > B$

را می‌گویند نامعادله! با حل مثال شروع می‌کنم! چون اینجا سوسول بازی نداریم!!

مثال: (کار در کلاس) حداقل و حداکثر دمای یک شهر در یک روز، ۱۵ و ۲۵ درجه سانتی‌گراد است و رابطه بین درجه فارنهایت  $F$  و سانتی‌گراد  $C$  به صورت است. حداقل و حداکثر دما را برهسب فارنهایت پیابید.

answer

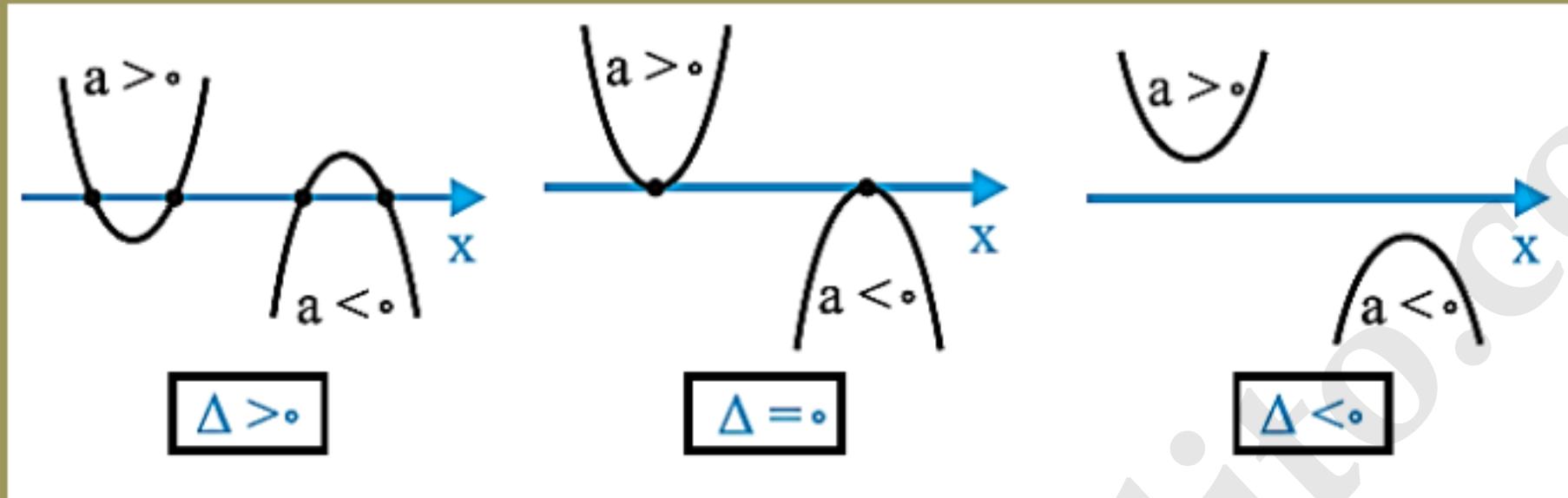
## حل نامعادلات پیچیده‌تر (درجه ۲ و کسری و...)

عبارت داده شده را در جدول تعیین علامت کنید. بازه‌ای که در نامعادله صدق می‌کند را به عنوان جواب ارائه دهید. مثال‌های زیر را بینید.

$$3x^2 - x - 2 \geq 0$$

$$\frac{x^2 - 9}{2x + 1} \geq 0$$

answer



به وضعیت یک سومی نگاه کن:

با توجه به آن نتیجه می شود که:

- .  $a > 0$   $\Delta < 0$  ثانیا
- .  $a < 0$   $\Delta < 0$  ثانیا

۱۴ نکته طلایی: اگر  $a > 0$  باشد درین:

۱  $\boxed{\quad}^2 \geq a^2 \Leftrightarrow \boxed{\quad} \geq a \text{ or } \boxed{\quad} \leq -a$

۲  $\boxed{\quad}^2 \leq a^2 \Leftrightarrow -a \leq \boxed{\quad} \leq a$

۳  $|\boxed{\quad}| \geq a \Leftrightarrow \boxed{\quad} \geq a \text{ or } \boxed{\quad} \leq -a$

۴  $|\boxed{\quad}| \leq a \Leftrightarrow -a \leq \boxed{\quad} \leq a$

مثال: برای په مقادیری از  $m$  عبارت  $y = -2mx^2 + mx - \frac{1}{2m}$  همواره مثبت است؟ (مثال کتاب با تغییر)

answer

مثال: (کار، کلاس) در نامعادله زیر، مجموعه جواب را به صورت بازه بدست آورده و سپس روی مکور نشان دهید.

$$|5 - 2x| \geq 1$$

answer

نکته: هواست باشه! یا به معنی اجتماع و به معنای اشتراک است.

۱- (تمرین کتاب) هر یک از معادله‌های زیر را به روش دلفواه حل کنید.

$$2x^2 = 250$$

$$9 - 6z + z^2 = 0$$

$$4a^2 + 3a = 1$$

$$b^2 + \sqrt{2}b - 4 = 0$$

